

إنتاج المحزرات الهولوجرامية الحاسوبية

عنان صالح العيثاوي	أ.د. فريد فارس رشيد	رائد كامل جمال
جامعة بغداد / كلية العلوم للبنات	الجامعة التكنولوجية/ كلية الهندسة	جامعة بغداد/ كلية العلوم
قسم الفيزياء	فرع الليزر	قسم الفيزياء

الخلاصة:

توجد هناك العديد من التطبيقات الهولوجرامية الحاسوبية من بينها إنتاج عناصر ضوئية هولوجرامية حاسوبية والمتمثلة بالمحزرات (Grating) حيث عن طريقها يمكن إنتاج جبهة أي موجة مرغوبة فيها، حيث اعتمد في صناعتها على تقنية الهولوجرامات المصنوعة الثنائية (Binary Synthetic Hologram). في هذا البحث تم بناء محرز هولوجرامي لإنتاج جبهة الموجة الكروية (Spherical Wavefront) وجبهة الموجة المخروطية (Conical Wavefront) وهذه الموجات المذكورة سابقاً تم إعادة بنائها بطريقتين، بصرياً وحاسوبياً.

المقدمة :

موجة الجسم ($\exp(i\phi(x,y))$) والثانية موجة المرجع المسددة ($\exp(i2\pi x/\Delta x)$) فان مواقع الأهداب المتكونة تحقق المعادلة الآتية:

$$2\pi \left(\frac{x}{\Delta x} \right) - \phi(x, y) = 2n\pi \quad (1)$$

$$\frac{x}{\Delta x} - [\phi(x, y) / 2\pi] = n \quad (2)$$

حيث (n) هو عدد صحيح ويمثل مرتبة الهدب. في حالة غياب تغير الطور الناشئ عن $\phi(x, y)$ فالهولوجرامات المتكون يكون له حوزوز دورية (periodic Grating) عرض الحز الواحد (Grating Period) يساوي (Δx). عندما تكون قيمة العامل ($\exp(i\phi(x,y))$) ضمن المساحة ($\Delta x, \Delta y$) ومركزها عند النقطة ($n\Delta x, m\Delta y$) فان تلك القيمة

في سنة (1966) بين كل من (Lohmann , Brown) بان جبهات الموجة لأي شكل معروف يمكن أن تنتج مع تقنية الهولوجرامات المصنوعة الثنائية [1] . وبعد ذلك قدم كل من (Paris, Lohmann) دراسة مفصلة لتلك التقنية [2]. وهذه الهولوجرامات المصنوعة باستخدام تلك التقنية تتألف من مصفوفة من النوافذ المستطيلة، المساحات لهذه النوافذ تتناسب مع السعات لجبهة الموجة عند مواقع العينات المطابقة عند مستوي الهولوجرام، ومواقعها يتناسب مع مقدار الطور لجبهة الموجة عند مواقع العينات المطابقة في مستوي الهولوجرام. الوظيفة للنوافذ في الهولوجرام الثنائي نوع لومان تكون مشابهة لوظيفة الأهداب في الهولوجرامات التقليدية بسبب كلاهما يستخدمان تأثير الطور والسعة للضوء المتشاكه المستخدم. في الهولوجرامات التقليدية المتكون من قبل تداخل الموجتين (الأولى

$$h(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(m\pi q)}{mq} e^{[im\phi(x, y)]} \quad (4)$$

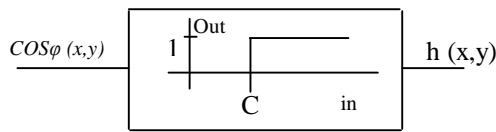
حيث (q) تعطى بالعلاقة $[\sin^{-1} A(x, y) / \pi]$ وتكون محصورة بين $0 \leq q \leq 1/2$. وهكذا فإن دالة الهولوجرام الثنائي المتولد بواسطة هذا المحدد يمكن إنتاج أي جبهة موجة مرغوبة فيه، ولهذا فبدلاً من الحصول على أهداب ضيقة، فإن عرض الأهداب في الهولوجرام يمكن تنويعها (اختلافها) بتغيير قيمة (q). ومن الشكل (1) نرى بان دالة الهولوجرام $h(x, y)$ لها قيم غير صفرية إذا تحقق الشرط:

$$\cos \phi(x, y) \geq \cos \pi q \quad (5)$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل الآتي:

$$-q/2 \leq [\phi(x, y)/2\pi] + n \leq q/2 \quad (6)$$

والمعادلة أعلاه تعطي الصيغة العامة للتعبير عن توليد الهولوجرام الثنائي.



شكل (1): المحدد المثالي لتوليد الهولوجرام الثنائي المعظم (c) يساوي $\cos(\pi q)$ ، واعظم قيمة لـ $A(x, y)$ هي (1)

عندما يعاد بناء هذا النوع من الهولوجرامات سوف يتولد عدة موجات حائدة، وهذه الموجات سوف تفصل بشكل جانبي أو تلقائي، لهذا فإن الصيغة الرياضية لتوليد الهولوجرام التي سوف تعيد بناء جبهة الموجة المسددة تعطى بالشكل الآتي:

ستصبح بالشكل الآتي $(\exp(i\phi(n\Delta x, n\Delta y)))$ ، لذلك فإن مواقع الأهداب في معادلة (2) تمثل بالعلاقة:

$$x = n\Delta x + [\Delta x \phi(n\Delta x, m\Delta y)] / 2\pi \quad (3)$$

أن المعادلة أعلاه هي نفسها المستخدمة من قبل (Lohmann) لتحديد مواقع النوافذ في هولوجراماته المصطنعة الثنائية، حيث أن قيمة $(n\Delta x)$ تعطي موقع مركز كل خلية للعينات (Sampling Cell) على طول الاتجاه (x)، و $(\Delta x \phi(n\Delta x, m\Delta y) / 2\pi)$ تمثل الانحراف للنفاذة عن مركز الخلية للعيننة. كما ويمكن رؤية بان الانحراف عن مركز الخلية للعيننة هي تتناسب مع الطور لجبهة الموجة نوع لومان.

سنحاول في البند القادم إيجاد الحل المضبوط والمشابه لمعادلة (2) لإنتاج المحزرات الهولوجرامية، والتي يمكن تحقيقه بفرض أن جبهة الموجة للهولوجرام المصطنع يكون لها سعة ثابتة، فضلاً عن ذلك يتم تقديم الإجراءات اللازمة لصنع تلك الهولوجرامات (المحز).

الهولوجرام الثنائي المصطنع:

المشكلة العامة لصنع الهولوجرام الثنائي هي إيجاد دالة الهولوجرام $h(x, y)$ التي لها قيمتين (1, 0) ويمكن إنتاج أي جبهة موجة مرغوبة فيها بالضبط بتغيير معلوماتها. أن المعلومات الحرة للدالة أعلاه هي المساحات والمواقع للنوافذ في الهولوجرام. حيث يمكن الحصول على جبهة الموجة المرغوبة بضبط المواقع والمساحات لتلك النوافذ. وفي هذا البند سوف نأخذ دالة الهولوجرام الثنائي المتناوب (Alternate Binary Hologram) للحصول على جبهة الموجة المطلوبة ألا وهي $(\exp(i\phi(x, y)))$ ويحدث هذا بمرور الدالة $\cos\phi(x, y)$ خلال محدد غير خطي (Nonlinear Limiter) المبينة في الشكل (1). وبشكل واضح الدالة الخارجة $h(x, y)$ لهذا المحدد هي ثنائية. أن بعض المراجع [3,4] تبين بان الدالة $h(x, y)$ الحاصلة من المحدد (Limiter) يمكن أن يعبر عنه المعادلة الآتية:

جعلها مساوية لـ (Bx) . وبالنتيجة فإن العينات الدورية في اتجاه (y) تساوي $(2T)$. وبسبب مواقع الأهداب نحصل عليها من حل معادلة (7) والدقة لهذا الحل يعتمد على العينات الدورية على طول الاتجاه (x) . وفي التطبيق فإن العينات الدورية تنتخب لتكون (T/M) حيث (M) هو عدد صحيح. ولحل معادلة (7) حاسوبياً، فتحويل العينات (Sampled Version) يجب أن يعمل بتعويض (TK_x / M) بدلاً عن (x) و تعويض $(2TK_y)$ بدلاً عن (y) . لذلك تصبح معادلة (7) بالشكل الآتي:

$$-q/2 \leq \frac{K_x}{M} + \frac{[\phi(TK_x / M, 2TK_y)]}{2\pi} + n \leq q/2 \quad (11)$$

وبضرب المعادلة أعلاه في (M) نحصل على:

$$-(Mq/2) \leq K_x + \frac{M[\phi(TK_x / M, 2TK_y)]}{2\pi} + Mn \leq (Mq/2) \quad (12)$$

والآن إذا أخذنا [Modulo M] للمعادلة أعلاه سنحصل على:

$$\text{Mod}\left(-\frac{Mq}{2}\right) \leq \text{Mod}\left[K_x + \frac{M[\phi(TK_x / M, 2TK_y)]}{2\pi} + Mn\right] \leq \text{Mod}\left(\frac{Mq}{2}\right) \quad (13)$$

إذ أن هناك صفتان للمتباينة الرياضية تستخدم هنا وهي:

$$\left. \begin{aligned} 1) \text{ Mod}(a + M) &= \text{Mod}(a), \quad n = \text{integer} \\ 2) \text{ Mod}(-a) &= \text{Mod}(M - a), \quad \text{for } a < M \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$-q/2 \leq \frac{x}{T} + [\phi(x, y)/2\pi] + n \leq q/2 \quad (7)$$

إذا كان مقدار الطور $\phi(x, y)$ هو مقدار ثابت فالهولوغرام الثنائي المصنوع باستخدام معادلة (7) هو محرز دوري مع حز له عرض مقداره (T) ، حيث أن عرض الحز هو الثابت الذي يحدد زاوية الفصل للموجات الناتجة من إعادة البناء.

الأساس الفيزيائي لتوليد المحرز الهولوغرامي:

قبل حل معادلة (7)، في البداية يجب أن نجد قيمة (T) ، فإذا الهولوغرام المصنوع يعتمد على معادلة (7) لذلك فالتردد الفضائي (Spatial Frequency) للهولوغرام في اتجاه (x) هو:

$$V_s(x, y) = \frac{1}{T} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \quad (8)$$

المقدار $(1/T)$ يمكن تفسيره كحامل التردد الناشئ عن الميل في جبهة الموجة. المقدار الثاني يطابق التردد الفضائي لجبهة الموجة $(\exp(i\phi(x, y)))$. أن عرض الحزمة (Bandwidth) لجبهة الموجة $(\exp(i\phi(x, y)))$ في اتجاه (x) يمكن تعريفه كالتالي:

$$B_x = \frac{1}{\pi} \text{Max}_{x, y} \left| \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \right| \quad (9)$$

وإذا (T) حققت المعادلة الآتية:

$$1/T \geq 1.5 B_x \quad (10)$$

فالمرتبة الأولى للموجة الحائدة من الهولوغرام يمكن فصلها عن المراتب العليا للموجات الحائدة. وفي حالة كون $(1/T = 1.5 B_x)$ فإن المرتبتين الأولى والثانية للموجات الحائدة سوف تتلامس في مستوي تحويل فورييه للهولوغرام. لذلك فإن أفضل تطبيق للشرط أعلاه سيكون $(1/T = 2B_x)$ لذلك على الأقل المرتبتين الأولى والثانية للموجات الحائدة سوف تفصل بشكل مناسب. عرض الحزمة باتجاه المحور (y) هو (B_y) وبشكل عام يمكن

• جبهة الموجة الكروية:

تكلما في البند (أ) بان الهولوجرام الثنائي المصطنع بإمكانه أن يعيد بناء أي جبهة موجة، ألان لو أردنا الحصول على جبهة موجة كروية والتي طورها يعطى حسب العلاقة الآتية:

$$\phi(x, y) = \frac{\pi(x^2 + y^2)}{\lambda f} \quad (17)$$

حيث أن (λ) تمثل الطول الموجي للضوء المستخدم المتشاكه، وان (f) تمثل البعد البؤري. ولإيجاد قيمة الثابت (λf) نطبق معادلة عرض الحزمة باتجاه (x) ، كما في المعادلة (9)، بعد أن نعوض معادلة (17) فيها، لذلك فان قيمة (B_x) ستساوي:

$$B_x = \frac{D}{\lambda f} \quad (18)$$

حيث D تمثل الامتداد الجانبي لجبهة الموجة. ومن منطلق بان أفضل قيمة لـ (B_x) هي عندما تساوي $(1/2T)$ ، وبتعويضها في المعادلة أعلاه نحصل على:

$$T = \frac{\lambda f}{2D} \quad (19)$$

وعندما نضرب طرفي المعادلة أعلاه بـ (T) ، ومن تعريف عدد الأهداب (N) في الهولوجرام يساوي (D/T) لذلك سيكون قيمة (λf) تساوي:

$$\lambda f = 2T^2 N \quad (20)$$

وبعد حساب قيمة الثابت (λf) نقوم بتعويضها في معادلة (17) للحصول على دالة الطور للموجة الكروية وعند عمل عينات لدالة الطور نحصل على:

$$\phi(TK_x/M, 2TK_y) = \frac{\pi}{2M^2 N} (K_x^2 + 4M^2 K_y^2) \quad (21)$$

الهولوجرامات الثنائية المصطنعة أو المحزرات يمكن صنعها باختيار كل نقطة (K_x, K_y) ضمن المتباينتين الآتيتين [5]:

$$\text{Mod} \left[K_x + \frac{M\phi(TK_x/M, 2TK_y)}{2\pi} \right] \leq \text{Mod} \left[\frac{Mq}{2} \right] \quad (15)$$

$$\text{Mod} \left[K_x \frac{M\phi(TK_x/M, 2TK_y)}{2\pi} \right] \leq \text{Mod} \left[M - \frac{Mq}{2} \right] \quad (16)$$

إذا النقطة حقت أي واحدة من المتباينتين أعلاه، فان طول العنصر الخطي يساوي $(2T)$ وهذا العنصر يرسم بشكل موازي للمحور (y) حول تلك النقطة. وكذلك بالإمكان إيجاد مواقع جميع النقاط التي تعود لنفس الهدب وربط النقاط لصنع الأهداب المختلفة في الهولوجرام.

سيتم مناقشة في البندين القادمين جبهة الموجة الكروية والمخرؤية والتي لها أطوار مختلفة وسوف يتم معالجة كل حالة للحصول على معادلة النهاية لتحديد مواقع الأهداب في مستوي الهولوجرام.

الجزء العملي:

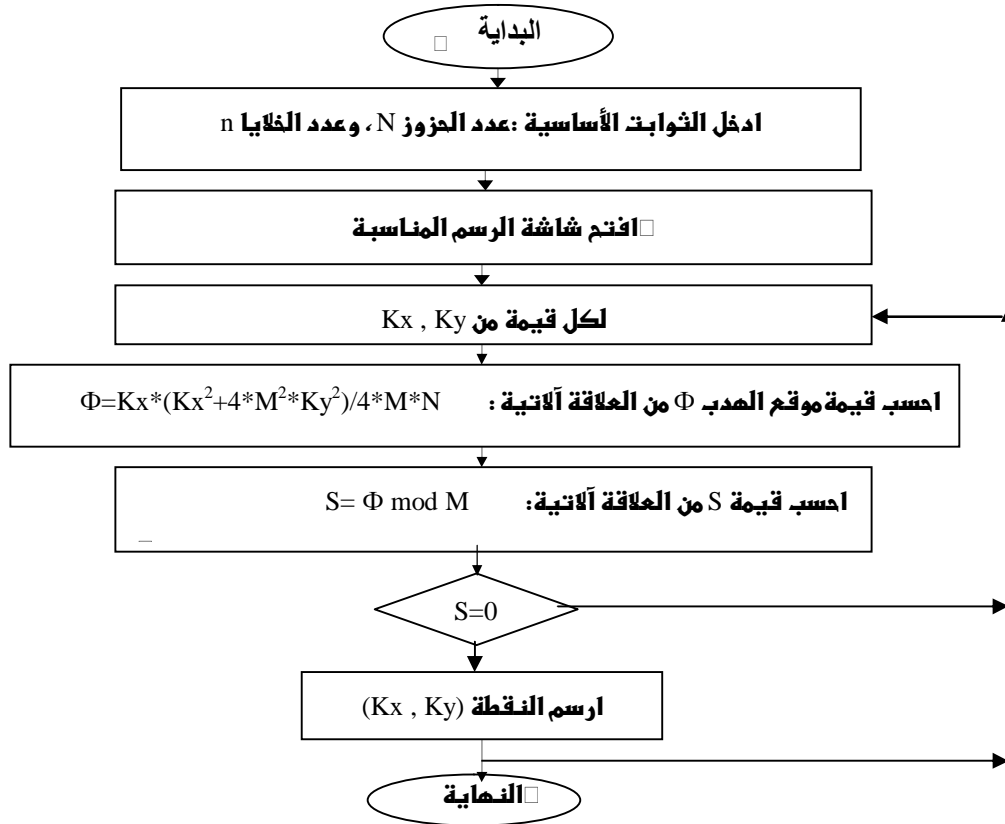
تتم عملية توليد المحزرات الهولوجرامية الحاسوبية والمسماة بالهولوجرامات المصطنعة الثنائية بأخذ $(N=80)$ هدب وباستخدام الثابتين $(M=100, q=0)$. أن الهولوجرامات الناتجة كانت قد رسمت على جهاز شاشة الحاسوب وتم سحبها بواسطة الطابعة الليزرية، حيث وجد أن كل هولوجرام يستغرق حوالي (30) دقيقة لإتمام الرسم.

وبعد الانتهاء من إيجاد المعادلة النهائية لتحديد مواقع الأهداب أصبح الآن بالإمكان بناء البرنامج الحاسوبي لإنتاج هذا النوع من المحزرات وذلك من خلال تتبع المخطط الانسيابي المبين في الشكل (2) حيث يتم أولاً إدخال قيم كل من عدد الحزوز ($N=80$) وقيمة الثابت ($M=100$) وعدد الخلايا ($n=100$)، ومن ثم بعدها يتم فتح نافذة مناسبة لرسم المحزز الهولوجرامي بعد حساب مواقع الأهداب داخل المحزز عن طريق معادلة (22) ومن ثم إجراء عملية الـ (Mod) مع الثابت (M) فإذا كانت قيمة الـ (Mod) تساوي (صفرًا) فيتم رسم الخلية عند الموقع (K_x, K_y) أما إذا لم يتحقق الشرط أعلاه فإنه سوف لا يرسم أية شيء وبذلك تستمر العملية بالنسبة إلى بقية القيم الأخرى. وأخيراً يمكن القول هنا بأن أن البرنامج الذي تم إعداده قد تم صيغته بلغة الـ (Quick Basic).

وأخيراً فلنحدد مواقع الأهداب في الهولوجرام يتم تعويض المعادلة أعلاه في معادلة (15) بعد فرض أن قيمة $(q=0)$ ، لذلك فإن مواقع الأهداب في الهولوجرام تتبع المعادلة الآتية:

$$\text{Mod}[K_x + \frac{(K_x^2 + 4M^2 K_y^2)}{4MN}] = 0 \quad (22)$$

إذ أن قيمة (K_x) سوف تتغير عند المدى $[-MN/2, MN/2]$ وان $[MN/2, -MN/2+1, \dots, MN/2-1, MN/2]$ قيمة (K_y) سوف تتغير عند المدى $[-N/2, N/2]$ $[N/2+1, \dots, N/2-1, N/2]$ نلاحظ ومن خلال معادلة (22) بأن جميع المعلمات الفيزيائية للموجة الكروية هي كميات ليس لها أبعاد (Dimensionless) مثل M ، N .



شكل (2): المخطط الانسيابي لتشكيل المحزز الهولوجرامي وإنتاج جبهة الموجة الكروية.

وبعد الانتهاء من تنفيذ البرنامج نحصل على الشكل (5) الذي يبين تركيبة المحرز الهولوجرامي الناتج من قبل هذه التقنية الذي أبعاده يساوي (11cm x 8cm) في الأصل. إذ أن من الممكن تحديد البعد البؤري لجبهة الموجة الناتجة من قبل الهولوجرام عن طريق المعادلة (TF/2D)، أما بالنسبة إلى (f-number) لجبهة الموجة الكروية فأنها تساوي (2T/λ).

$$\phi(TK_x / M, 2TK_y) = \frac{\pi}{2M^2} (K_x^2 + 4M^2 K_y^2)^{1/2} \quad (24)$$

بعد الانتهاء من إنتاج المحرز الهولوجرامي تتم بعدها عملية إعادة البناء وبطريقتين وهاتين الطريقتين هما الحاسوبية وبالاستعانة بالبرنامج الحاسوبي المعد للقيام بتلك العملية والموضحة خطواته في الشكل (3)، ويبين الشكل (6) صورة إعادة البناء الحاسوبي والممثل بحيود فرانوفر للهولوجرام (المحزز) الناتج من قبل الشكل (5) حيث نلاحظ ظهور ثلاث مراتب حيود على جانبي المرتبة الصفرية (البقعة المضئية). أما بالنسبة إلى الطريقة الثانية لعملية إعادة البناء والتي تم العمل بها هي الطريقة البصرية، وكالمعتاد يتم سحب شكل الهولوجرام من الحاسوب على ورق (A4) وبالأبعاد السابقة عن طريق الطابعة الليزرية ومن ثم تصغيرها بشكل مناسب للحصول على أفضل حالة للحيود وتتم تلك العملية عن طريق التصوير الدقيق (Microfilm) وبعدها يوضع الهولوجرام (المحزز) الناتج من هذه العملية في النظام البصري المبين في الشكل (4) وبهذا نحصل على صورة إعادة البناء وكما هي موضحة في الشكل (7) والتي تمثل نموذج حيود فرانوفر للهولوجرام الناتج. وعند إمعان النظر فيها نلاحظ ظهور ثلاث مراتب حيود من الموجات الحائدة على جانبي المرتبة الصفرية أيضاً.

$$\text{Mod}[K_x + \frac{1}{4}(K_x^2 + 4M^2 K_y^2)^{1/2}] = 0 \quad (25)$$

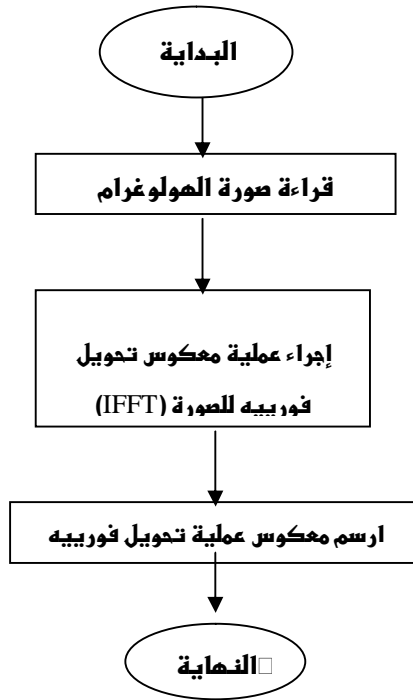
وبعد الانتهاء من تنفيذ البرنامج نحصل على الشكل (8) الذي يمثل تركيبة المحرز الهولوجرامي الناتج من قبل هذه التقنية الذي أبعاده يساوي (11cm x 8cm) في الأصل. بعد الانتهاء من إنتاج المحرز الهولوجرامي تتم هنا أيضاً عملية إعادة البناء وبالطريقتين المشروحتين سابقاً الحاسوبية والبصرية ففي الحالة الأولى نحصل على الشكل (9) وفي الحالة الثانية نحصل على الشكل (10) وفي كلتا الحالتين نلاحظ ظهور ثلاث مراتب حيود على جانبي المرتبة الصفرية (البقعة المضئية) وكما مر بنا في حالة جبهة الموجة الكروية.

ويمكن الإطلاع على المرجع [6] الذي يوضح عملية إنتاج المحرز الذي يعيد بناء جبهة الموجة الحلزونية (Helical Wavefront).

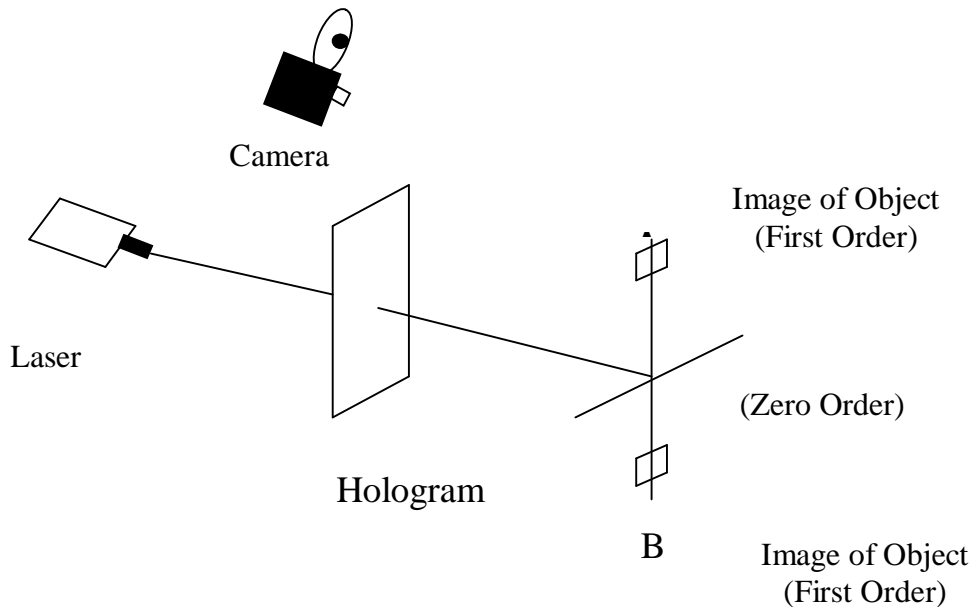
•• جبهة الموجة المخروطية:
في هذه الحالة يكون دالة الطور لجبهة الموجة معطى بالمعادلة الآتية:

حيث أن قيمة (r=x²+y²) ولإيجاد قيمة الثابت (r₀) نطبق معادلة عرض الحزمة حيث نجد أنها تساوي

$$\phi(x, y) = 2\pi r / r_0 \quad (23)$$



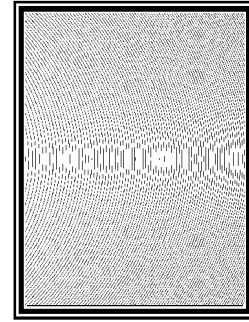
شكل (3): يمثل المخطط الانسيابي لعملية إعادة البناء الحاسوبي للهولوجرامات المنتجة حاسوبياً



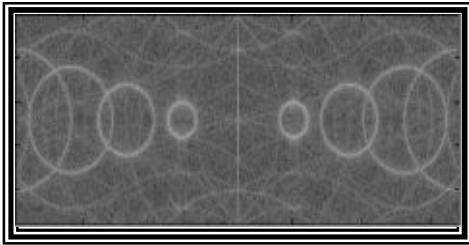
شكل (4): يمثل النظام البصري المستخدم لإعادة بناء الهولوجرام



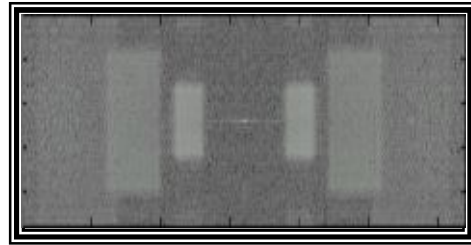
شكل (8): يمثل المحرز الهولوجرامي الحاسوبي للموجة المخروطية



شكل (5): يمثل المحرز الهولوجرامي الحاسوبي للموجة الكروية



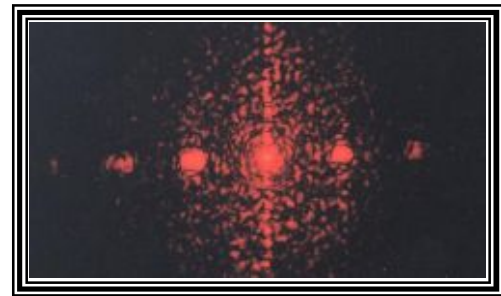
شكل (9): يمثل إعادة البناء الحاسوبي للهولوجرام في أعلاه.



شكل (6): يمثل إعادة البناء الحاسوبي للهولوجرام في أعلاه.



شكل (10): يمثل إعادة البناء البصري للهولوجرام في أعلاه.



شكل (7): يمثل إعادة البناء البصري للهولوجرام في أعلاه.

الاستنتاجات:

الصواريخ حيث يوضع في مقدمة الصواريخ لغرض التوجيه، وكذلك يعمل على توليد جبهة أي موجة مرغوبة فيها.

حالياً المحرز الناتج له قدرة تفريق بسيطة وهذا يعود إلى قابلية وإمكانية الحاسبة من حيث المسافة الفاصلة بين هذب وآخر حيث أن أقصى حد لعدد الأهداب يمكن أخذها هي (80) في محرز عرضه $(11 \times 8) \text{cm}^2$ ويمكن تطوير هذا المحرز بزيادة كفاءة الحاسوب.

أن المحززات الهولوجرافية المولدة حاسوبياً تتميز عن الهولوجرامات البصرية بعدة ميزات، منها سهولة وسريعة الصنع، وقلّة التكاليف المصروفة، وسهولة الاستخدام والتعامل معها، بالإضافة إلى أنها خفيفة الوزن، وتعطي نفس كفاءة المحززات البصرية تقريباً" من حيث توليدها إلى مراتب الحيود. حيث يتطلب منا لعمل المحززات أعداد برنامج يعمل على إنتاج محززات هولوجرافية والذي بدوره يعمل عمل المحزز البصري من حيث توليده إلى مراتب الحيود. ويستخدم هذا المحزز في عدة مجالات منها في المسح الليزري وفي توجيه

REFERENCES:

- 1- B. R. Brown and A. w. Lohmann, Appl. Opt. Vol 5, P. 967 (1966).
- 2- A. W. Lohmann and D. P. Paris, Appl. Opt. Vol 6, P. 739 (1967).
- 3- A. W. Lohmann and D. P. Paris, Appl. Opt. Vol 9, P. 1567 (1967).
- 4- J. W. Goodman and A. M. Silvestri, IBM J. Res Dev. Vol. 14, P. 478 (1969).
- 5- N. S. Szabo and R. I. Tanaka, Residue Arithmetic and Its Application to Computer Technology (McGraw-Hill, New York, 1967), P. 16.
- 6- O. Bryngdahl, J. Opt. Sco. Am. Vol. 63, P. 1098 (1973).